# III номер

1. Какой вектор называется собственным вектором линейного оператора?  
     
   Ненулевой вектор называется **собственным**, если вектором оператора , если , где -**собственное значение** оператора , отвечающее **собственному вектору** .
2. А что такое собственное значение линейного оператора?  
     
   Смотреть пункт 1.

Что такое характеристическое уравнение и характеристический многочлен?  
  
– **характеристический многочлен** .

**характеристическое уравнение** – уравнение, составленное по характеристическому многочлену  
  
Давайте выведем характеристическое уравнение

Пусть - матричное представление вектора

Представим это выражение как ОСЛАУ. Заметим, что нас не устраивает нулевое решение (так как вектор - собственный вектор)

Докажем, что эта ОСЛАУ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

Докажем, что при решений нет.

Пусть

Тогда (Здесь мы говорим, что если определитель не равен нулю, то ОСЛАУ можно решить через обратную матрицу)

Но так как - собственный вектор.

Значит, при решений точно нет. Докажем, что при ненулевые решения будут.

Пусть

А) Значит в результате линейных преобразований мы можем получить “обнуленную” строчку (так как строчки линейно зависимы). Значит количество базисных переменных меньше количества самих переменных, значит есть свободные переменные. А если есть свободные переменные, значит есть хотя бы одно ненулевое решение.

Б) Значит столбцы - линейно-зависимы. Значит существует нетривиальная комбинация при которой верно, что

То есть

Или мы можем это расписать как

То есть, при будет верно, что (нулевое решение мы не рассматриваем)

Значит образуют ненулевое решение.

1. Зачем они нам нужны? Объясните свои слова.  
     
   Они нужны нам для того, чтобы найти собственные значения/векторы (хз че тут пояснять надо, вроде и так все О Ч Е В И Д Н О).
2. Докажите, что характеристический многочлен не зависит от базиса.  
     
   Пусть у нас есть . Соответственно, есть две матрицы оператора для разных базисов:.
3. К чему сводится характеристическое уравнение для случаев dim V=2 и 3?  
     
   К квадратным/третьестепенным уравнениям.   
      
   Т.е.
4. Докажите, что определитель и след матрицы оператора не зависят от выбора базиса  
     
   Пусть у нас есть . Соответственно, есть две матрицы оператора для разных базисов:.
5. Доказать линейную независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.  
     
   Докажем эту теорему по индукции.  
     
   Очевидно, что если собственный вектор один, то система векторов линейно независима.  
     
   Пусть утверждение верно при m = k. Тогда при m= k+1.  
     
   Имеем: вектора линейно независимы (попарно различные собственные значения - соответствующие им собственные вектора - .

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию для собственных векторов

Тогда

т. е.

то есть доказано равенство

(2) - (1)\*  
  
т.е.

Т. е.   
По предположению индукции для векторов утверждение о линейной независимости верно, т. е.

Но

1. Докажите, что если x - собственный вектор, то 2x - тоже собственный вектор с тем же собственным значением.
2. Док, что если x и y - собственные векторы с собственным значением , то 2x-3y также является собственным вектором с тем же собственным значением.  
     
   Так как x и y- собственные векторы с одинаковым собственным значением, то они коллинеарные. Следовательно, 2х-3у также является собственным вектором с тем же собственным значением (так как он коллинеарен х и у).
3. Геометрический поиск собственных векторов у операторов из задачи 3  
     
   Ну, тут надо конкретно смотреть по задаче. Например, у меня проектирование ось. Очевидно, что собственными векторами будут векторы, которые лежат на прямых, принадлежащих оси и лежащих перпендикулярно оси. Т.е. смотрите что у вас делает линейные оператор, и думаете, в каких случаях вектор не будет менять “направление”